

Analyzing the Performance of Machine Learning Algorithms in Pricing Financial Options: A Study on the Tehran Stock Exchange

Assint .Prof. Eslam Fakher

Reza Mahdavi

Prof. Dr. Ghassan Tareq
Dhahir

Faculty of Economic and Social
Sciences, Shahid Chamran
University, Ahvaz, Iran
e.fakher@scu.ac.ir
Received: 15/12/2024

Faculty of Economic and Social
Sciences, Shahid Chamran
University, Ahvaz, Iran
Re-Mahdavi@stu.scu.ac.ir
Accepted: 16/2/2025

Faculty member of financial
and Banking Department , Al-
Muthanna University
Dr.Ghassan79@mu.edu.iq
Published: 31/12/2025

Abstract

This study compares the performance of machine learning algorithms with the Black-Scholes model in predicting the price of financial options. Data from 153 contracts traded on the Tehran Stock Exchange between April 2018 and July 2024 were used. The models' performance was evaluated using MAE and RMSE metrics, and the results indicated that machine learning algorithms significantly outperformed the Black-Scholes model in terms of prediction accuracy.

Keywords: Pricing Financial Options Contracts, Option Greek, Black-Scholes Model, and Machine Learning Algorithms.

تحليل أداء خوارزميات التعلم الآلي في تسعير عقود الخيارات المالية: دراسة في بورصة طهران

أ.د. غسان طارق ظاهر

رضا مهدي

أ.م. اسلام فاخر

قسم الدراسات المالية والمصرفية - جامعة المثنى

قسم الإدارة، كلية الإقتصاد والعلوم

قسم الإدارة، كلية الإقتصاد والعلوم

الإجتماعية، جامعة الشهيد چمران،

الإجتماعية، جامعة الشهيد چمران

الأهواز، إيران.

الأهواز، إيران

المستخلص

المسألة: يعدّ التحكم والحدّ من مخاطر السوق أحد أكثر التحديات تعقيداً التي تواجه المستثمرين. في هذا السياق، تلعب عقود الخيارات المالية دوراً محورياً كأدوات مالية مرنة. لذلك، يعد إيجاد أساليب مناسبة لتسعير عقود الخيارات من القضايا الرئيسية في مجال إدارة المخاطر، إذ تُواجه النمذجة المالية تحديات كبيرة بسبب العلاقات غير الخطية والمعقدة بين المتغيرات المؤثرة على أسعار الأصول المالية، إذ تعتمد النماذج التقليدية على افتراضات تعييدية غالباً لا تتماشى مع واقع السوق. على النقيض من ذلك، تتميز نماذج التعلم الآلي بقدرتها على اكتشاف العلاقات المعقدة وغير الخطية بين المتغيرات دون الحاجة إلى افتراضات مبسطة، مما يمكنها من تقديم نماذج مرنة وقابلة للتكيف مع البيانات. تهدف هذه الدراسة إلى تحليل أداء خوارزميات التعلم الآلي ومقارنتها مع أداء نموذج بلاك شولز في التنبؤ بأسعار عقود الخيارات المالية لعينة من العقود المتداولة في بورصة طهران. تعتمد الدراسة على بيانات 153 عقد خيار مالي تم تداولها في بورصة طهران للأوراق المالية خلال الفترة من أبريل 2018 إلى يوليو 2024. إذ تم تسعير هذه العقود باستخدام خوارزميات التعلم الآلي، ثم مقارنة أداء هذه النماذج مع نموذج بلاك شولز باستخدام معايير إحصائية مثل متوسط الخطأ المطلق (MAE) وجذر متوسط مربع الخطأ (RMSE). أظهرت النتائج أن خوارزميات التعلم الآلي تفوقت بشكل كبير على نموذج بلاك شولز الكلاسيكي من حيث دقة التنبؤ بأسعار عقود الخيارات للعينة قيد البحث.

الكلمات المفتاحية: تسعير عقود الخيارات المالية، حساسية المؤشرات اليونانية، نموذج بلاك شولز، خوارزميات التعلم الآلي.

1. المقدمة

يسعى المستثمرون في ظل الديناميكية السريعة والتنافسية الشديدة لقطاع الأسواق المالية، باستمرار إلى البحث عن أدوات جديدة تمكنهم على تغطية المخاطر الناجمة عن تقلبات السوق. واحدة من تلك الأدوات هي عقود الخيارات، التي أثبتت كفاءتها كحل فعال لإدارة حالة عدم اليقين في الأسواق. على الرغم من حداثة عهد عقود الخيارات في سوق الأوراق المالية الإيرانية، فقد حازت على

اهتمام كبير بفضل إمكاناتها العالية لتحقيق الأرباح وإدارة المخاطر. ومع ذلك، فإن الطبيعة المحفوفة بالمخاطر لهذه الأداة المالية تجعل من تسعيرها الدقيق ضرورة حتمية للمستثمرين. إذ قد يؤدي التسعير غير الدقيق لعقود الخيارات إلى تقويض استراتيجيات المستثمرين ودفعهم نحو اتخاذ قرارات خاطئة. لذلك، أصبحت مسألة تسعير عقود الخيارات بدقة واحدة من القضايا المحورية التي تحظى باهتمام مستثمري البورصة خلال السنوات القليلة الماضية (Culkin & Das, 2017; Feng et al, 2020; Almeida et al, 2023). يحظى نموذج بلاك شولز من بين النماذج المالية المختلفة بمكانة متميزة في تسعير عقود الخيارات الأوروبية (Lim, 2023:p.2). رغم سهولة تطبيقه واعتماده في تقييم المشتقات المالية، فإن هذا النموذج يعتمد على افتراضات مثالية قد لا تتماشى مع تعقيدات الأسواق المالية الحقيقية، ما يؤدي أحياناً إلى نتائج غير دقيقة (Wu, 2019:p.13). على هذا النحو، غالباً ما يُستخدم كنقطة انطلاق لتطوير نماذج أكثر تقدماً (Lindgren, 2023:p.1). هذه القيود دفعت الباحثين نحو تصميم نماذج أكثر تعقيداً ومرونة (Hull & White, 1987; Melino & Turnbull, 1990; Stein & Stein, 1991; Heston & Nandi, 2000). ورغم التحسينات التي قدمتها النماذج المستخدمة، لا تزال هناك حاجة لتحسينات إضافية لضمان تسعير دقيق لعقود الخيارات. مع التقدم التكنولوجي وزيادة القدرات الحاسوبية، إذ شهدت السنوات الأخيرة تحولاً ملحوظاً نحو استخدام النماذج غير المعلمية في العديد من المجالات (Leung et al, 2023; Ban, El Karoui & Lim, 2018; Aziz & Dowling, 2019; Chen et al, 2021). يُعد التعلم الآلي، كمنهج غير معلمي قوي، أداة واعدة لتسعير أكثر دقة وملاءمة لعقود الخيارات. الميزة الأساسية لخوارزميات التعلم الآلي مقارنة بالنماذج التقليدية تتمثل في قدرتها على بناء نماذج دون الحاجة إلى افتراضات مسبقة، مما يجعلها أداة فعالة لمعالجة القضايا المعقدة في هذا المجال. لذا هدفت هذه الدراسة إلى تقييم ومقارنة دقة التنبؤ بين نماذج التعلم الآلي ونموذج بلاك شولز في سوق عقود الخيارات لعينة من عقود الخيارات المدرجة في بورصة إيران. ولتحقيق ذلك، سيتم مقارنة النتائج المستمدة من خوارزميات التعلم الآلي مع الأسعار الحقيقية في السوق باستخدام معايير إحصائية مثل متوسط الخطأ المطلق (MAE) وجذر متوسط مربع الخطأ (RMSE). علاوة على ذلك، ستتناول الدراسة مدى تأثير مؤشرات الحساسية اليونانية في تحسين أداء نماذج التعلم الآلي في تسعير عقود الخيارات. تتبع الدراسة الهيكل التالي: يتم أولاً تقديم الموضوع وأهميته، ثم يتم استعراض الإطار النظري والدراسات السابقة كأساس للبحث. بعد ذلك، يتم طرح أسئلة البحث والفرضيات، يليها شرح المنهجية، بما في ذلك جمع البيانات، الأدوات، وأساليب التحليل. أخيراً، يتم تحليل النتائج واختبار الفرضيات، مع تقديم مناقشات وتوصيات للبحوث المستقبلية.

٢. الإطار النظري للبحث

تزداد الحاجة إلى أدوات لإدارة المخاطر وفي ظل التقلبات الشديدة في الأسواق المالية، إذ تُعد المشتقات المالية أدوات فعالة وذات كفاءة عالية في هذا الصدد، إذ توفر تكلفة منخفضة ومرونة كبيرة. ومن بين هذه الأدوات، تلعب عقود الخيارات دوراً مهماً في البورصة الإيرانية، إذ تتيح للمستثمرين إمكانية تغطية فعالة للمخاطر الناتجة عن تقلبات الأسعار، مما أدى إلى زيادة شعبيتها بشكل ملحوظ (Parsemanesh et al, 2020:p.3). عقد الخيار هو اتفاق بين المشتري والبائع يمنح المشتري الحق، وليس الالتزام، في شراء أو بيع أصل معين بسعر محدد في المستقبل مقابل دفع مبلغ معين للبائع. يُطلق على هذا المبلغ قسط الخيار، وهو يمثل تعويضاً للبائع عن تحمله المخاطر المحتملة (Yosefzadeh Gandvani, Niknehad & Ghanbarpor, 2020:p.3).

عقود الخيارات تأتي بنوعين رئيسيين حسب أسلوب التنفيذ:

١. الخيارات الأمريكية: يمكن تنفيذها في أي وقت من تاريخ الإصدار حتى تاريخ الاستحقاق.
٢. الخيارات الأوروبية: يمكن تنفيذها فقط في تاريخ الاستحقاق (Goard & Abaoud, 2020:p.2).

١.٢ تطور نماذج تسعير الخيارات

تسعير عقود الخيارات بدقة هو موضوع حيوي في الرياضيات المالية، إذ تلعب دوراً محورياً في إدارة المخاطر واتخاذ قرارات استثمارية مدروسة (Li, 2024: p.1). من بين النماذج البارزة، طُوّر نموذج بلاك شولز في سبعينيات القرن الماضي على يد فيشر بلاك،

مايرن شولز، وروبرت ميرتون، والذي يعد أحد افضل إنجازات الرياضيات المالية. لأول مرة، قدم هذا النموذج طريقة لحساب السعر النظري لعقود الخيارات، مما أحدث تحولاً جذرياً في الصناعة المالية (Parameswaran & Basu, 2023: p.1).

٢.٢ قيود نموذج بلاك شولز

رغم شهرة وسهولة تطبيق نموذج بلاك شولز، فإنه يعتمد على افتراضات مبسطة، مثل تقلبات ثابتة وعدم وجود تكاليف معاملات. هذه الافتراضات لا تعكس دائماً الواقع المعقد للأسواق المالية، ما قد يؤدي إلى نتائج غير دقيقة (Wu, 2023: p.13). لذلك، يُستخدم النموذج غالباً كأداة مبدئية أو أساسية لتطوير نماذج أكثر تقدماً (Lindgren, 2023: p.1).

١.٢.٢ العوامل المؤثرة في تسعير الخيارات وفقاً لنموذج بلاك شولز

استند مبتكري النموذج إلى معادلة تفاضلية جزئية لتطوير صيغة تسعير الخيارات. وفقاً لهذا النموذج، هناك خمسة عوامل رئيسية تؤثر في تسعير عقود الخيارات:

١. سعر الأصل الحالي (S).

٢. سعر التنفيذ (X).

٣. المدة الزمنية المتبقية حتى الاستحقاق (T).

٤. تقلبات سعر الأصل (σ).

٥. معدل الفائدة الخالي من المخاطر (r) (Njomen & Djeutcha, 2019: p.4).

في صيغة بلاك شولز، يرمز C لسعر خيار الشراء ويرمز P لسعر خيار البيع.

٢.٢.٢ العلاقات الرياضية لتسعير الخيارات والمحدوديات الكلاسيكية

$$C = SN(d_1) - Xe^{-rT} N(d_2) \quad \dots\dots (١)$$

$$P = Xe^{-rT} N(-d_2) - SN(-d_1) \quad \dots\dots (٢)$$

$$d_1 = \frac{\log \frac{S}{X} + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad \dots\dots (٣)$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T} \quad \dots\dots (٤)$$

توضح العلاقة (١) كيفية تسعير خيار الشراء، بينما تبين العلاقة (٢) كيفية تسعير خيار البيع. في هذه العلاقات، اذ يمثل الرمز دالة التوزيع التراكمي الطبيعية القياسية التي تحسب احتمال وقوع حدث معين تحت منحنى التوزيع الطبيعي القياسي (Bramante, 2022: p.3).

٣.٢.٢ محددات النموذج الكلاسيكي بلك-شولز

تعتمد النماذج التقليدية مثل نموذج بلاك-شولز على فرضيات تبسيطية، أهمها:

١. توزيع العوائد الطبيعي: يفترض أن عوائد الأصول تتبع توزيعاً طبيعياً Normal Distribution، في حين أن الأدلة التجريبية تشير إلى وجود انحراف وتفرطح في توزيع العوائد.

٢. ثبات التقلبات: يفترض النموذج أن تقلبات أسعار الأسهم ثابتة، لكن الواقع يعكس ديناميكية متغيرة للتقلبات تبعاً للظروف السوقية (Flint & Mare, 2017: p.1).

المالية (Li, 2022: p.2). اذ ان التعلم الآلي هو فرع من فروع الذكاء الاصطناعي الذي يسمح لأجهزة الكمبيوتر بالتعلم والتحسين استناداً إلى البيانات دون الحاجة إلى برمجتها صراحة لأداء مهمة معينة. من خلال تحليل كميات ضخمة من البيانات، تكشف هذه النماذج عن الأنماط والعلاقات المخفية، وتعتمد عليها في إجراء التنبؤات واتخاذ القرارات الذكية (Macial, Angelov & Gomide, 2024: p.1).

Fan & Sirignano, 2023: (نماذج ذات دقة عالية في التنبؤ بأسعار أوراق الخيارات دون الحاجة إلى فرض فرضيات محددة) (p.1).

٤.٢.٢ تطبيقات عملية:- رغم التحديات، لا يزال نموذج بلاك شولز أداة مفيدة لفهم أساسيات تسعير الخيارات. ومع ذلك، تم توجيه جهود كبيرة نحو تحسين هذه النماذج باستخدام أساليب أكثر تعقيداً، مثل خوارزميات التعلم الآلي، لتوفير تقديرات أكثر دقة (Bramante, Dallago & Facchinetti, 2022: p.3).

٣.٢ حساسية المؤشرات اليونانية:- تعد المؤشرات اليونانية أدوات فعالة لفهم تأثير تغيرات السوق على أسعار الخيارات. وتشمل: دلتا (Δ): تأثير تغير سعر الأصل الأساسي.

جاما (Γ): حساسية دلتا تجاه تغيرات سعر الأصل الأساسي

ثيتا (Θ): تأثير مرور الزمن.

فيجا (ν): حساسية السعر تجاه تغيرات التقلبات.

رو (ρ): تأثير تغيرات أسعار الفائدة.

عند استخدام هذه المؤشرات كمدخلات إضافية، يمكن للنماذج تحسين أدائها وزيادة دقتها في تمثيل العلاقات السوقية (Sood et al, 2023: p.4).

٣. الدراسات السابقة:

قام بيماني وسرگلزايي ومصفا (٢٠٢٤م) في دراسة بتقييم أوراق الخيارات باستخدام طريقة الشجرة الثنائية تحت عدم اليقين النايتي وتكلفة المعاملات في بورصة طهران للأوراق المالية. إذ اعتمد بيانات خيارات المعاملات التي تمت في بورصة طهران للأوراق المالية من عام ٢٠١٧م حتى نهاية عام ٢٠٢٢م. تم جمع هذه البيانات المالية من موقع شركة إدارة تكنولوجيا بورصة طهران. بعد تقييم الأوراق باستخدام كل من النموذجين ومقارنة النتائج المحصلة، تبين أن النموذج الذي وضعه بلاك وشولز ومرتين كان يحتوي على أخطاء أقل مقارنةً بالنموذج الثنائي الشجري تحت عدم اليقين النايتي وتكلفة المعاملات. أما سعادي جهرمي (٢٠٢٣م) في أطروحته تناول تقييم أوراق الخيارات باستخدام التعلم الآلي. تم جمع ٧١٤٦ بيانات تتضمن ١١ رمزاً و٩٧ ورقة خيار. إذ تم جمع تلك البيانات المالية من موقع شركة إدارة تكنولوجيا بورصة طهران. في هذه الدراسة، أجرى الباحث مقارنة القيم المتوقعة بواسطة نماذج التعلم الآلي مع أسعار أوراق الخيارات في السوق استناداً إلى معيار الجذر التربيعي للخطأ المربع المتوسط. تم استخدام خوارزميات مثل دعم الآلات الشعاعية، الشبكة العصبية، وتعزيز التدرج السريع في هذه الدراسة. أظهرت النتائج أن خوارزمية تعزيز التدرج السريع قد أظهرت أفضل أداء في التنبؤ بأسعار أوراق الخيارات مقارنة ببقية خوارزميات التعلم الآلي المدروسة وكذلك نموذج بلاك شولز. قام مرادي نيك (٢٠٢٣م) في أطروحته بدراسة نماذج تسعير الخيارات من خلال دراسة حالة معاملات خيارات في بورصة إيران. إذ تم دراسة ١٣٠٧١ بيانات تخص ٨ رموز من عام ٢٠١٦م حتى ٢٠٢١م. بعد جمع المدخلات لنموذج بلاك شولز والشجرة الثنائية من موقع شركة إدارة تكنولوجيا بورصة طهران، تم فرز البيانات وحذف البيانات الشاذة في Excel. وأخيراً تم استخدام برنامج MATLAB لدراسة خطأ التنبؤ لكل من النماذج وفقاً لمعيار الجذر التربيعي للخطأ المربع المتوسط. وأظهرت نتائج الدراسة أن نموذج بلاك شولز كان يحتوي على أقل خطأ مقارنة بالبيانات الفعلية للسوق باستخدام كلا الأسلوبين المختلفين لتقلبات الخيارات الضمنية. وبالتالي أظهر نموذج بلاك شولز أداءً أفضل مقارنةً بالنموذج الثنائي الشجري في التنبؤ بأسعار أوراق الخيارات. تناول (Rygg, 2023) في أطروحته تسعير أوراق الخيارات باستخدام نماذج التعلم العميق^١. إذ استخدم بيانات مؤشر S&P500 من عام (٢٠١٥-٢٠٢٢). جمعت البيانات المالية من موقع بورصة شيكاغو للأوراق المالية. في هذه الدراسة، أجرى الباحث مقارنة القيم المتوقعة من قبل نماذج بلاك شولز، هستون^٢، و LSTM-MLP^٣ مع أسعار أوراق الخيارات في السوق، ومن خلال

1 - Deep Learning

2 - Multilayer Perceptron

3 - Long short-term memory

المعايير مثل الجذر التربيعي للخطأ المربع المتوسط ومتوسط الخطأ المطلق تبين أن النموذج المركب LSTM-MLP أظهر أداءً أفضل في التنبؤ بأسعار أوراق الخيارات مقارنة ببقية النماذج.

اما (Sood et al, 2023) فقد تناولوا تسعير أوراق الخيارات باستخدام التعلم الآلي. إذ تم استخدام بيانات مؤشر S&P500 من عام 2018م حتى 2019م. بالاعتماد على البيانات المالية المستسقة من موقع بورصة شيكاغو للأوراق المالية. في هذه الدراسة، تم مقارنة القيم المتوقعة بواسطة نماذج التعلم الآلي مع أسعار أوراق الخيارات في السوق، ومن خلال معيار الجذر التربيعي للخطأ المربع المتوسط تبين أن تسعير أوراق الخيارات باستخدام نماذج التعلم الآلي كان له أداء أفضل مقارنة بنموذج بلاك شولز.

واخيرا (Zouaoui & Naas, 2023) تناولوا تسعير أوراق الخيارات باستخدام نماذج التعلم العميق بناءً على الشبكات العصبية الذاكرة القصيرة والطويلة والوحدة العودية الجغرافية¹. وتم استخدام بيانات من بورصة لندن من عام (2020-2021). بالاعتماد على البيانات المالية لموقع بورصة لندن. في هذه الدراسة، تم مقارنة القيم المتوقعة بواسطة نماذج التعلم الآلي مع أسعار أوراق الخيارات في السوق، ومن خلال معيار متوسط الخطأ التربيعي² تبين أن تسعير أوراق الخيارات باستخدام نماذج التعلم الآلي كان له أداء أفضل مقارنة بنموذج بلاك شولز.

٤. أسئلة البحث

السؤال الأول: ما مدى فاعلية أداء خوارزميات التعلم الآلي في تسعير أوراق الخيارات مقارنة بنموذج بلاك شولز؟
السؤال الثاني: ما هو تأثير إضافة معاملات الحساسية اليونانية إلى مدخلات نماذج التعلم الآلي على أداء هذه النماذج في تسعير أوراق الخيارات؟

٥. منهجية البحث

يتكون مجتمع البحث من أوراق الخيارات التي تم تداولها في بورصة طهران للأوراق المالية من شهر من أبريل 2018م إلى شهر يوليو 2024م. ولنجاح تطبيق النموذج يجب ان يكون:

١. عدد أيام التداول لكل ورقة خيار على الأقل ٥٠ يومًا.

٢. عدد أيام التداول للرمز على الأقل ٠.٧ من إجمالي عدد أيام التداول في الفترة.

بعد اختيار الأوراق المناسبة، تأتي مرحلة ما قبل معالجة البيانات. في هذه المرحلة، يجب تحديد البيانات الشاذة أو الملوثة وإزالتها لتجنب تأثيرها السلبي على النموذج. وبالتالي، يتم تطبيق الفلترين التاليين على البيانات:

١. إزالة البيانات التي يكون سعر السوق لها أقل من ١٠ ريال.

٢. إزالة البيانات التي تاريخ استحقاقها أقل من ٥ أيام.

السبب وراء هذا هو أن أوراق الخيارات قد تشهد تقلبات شديدة في الأسعار في الحالات التي تشهد فيها تقلبات عالية. بعد تطبيق الفلاتر المذكورة، تم جمع ١٤٧٣٧ بيانات من ١٥٣ ورقة خيار تتعلق بـ ١١ رمزاً (ملت، جهش، شتاب، شينا، فملی، فولاد، های وب، وبصادر، خودرو، خساپا، شستا، و تجارت) والتي تم استخدامها لتدريب واختبار النماذج. تم جمع المعلومات اللازمة من خلال زيارة قواعد بيانات شركة إدارة التكنولوجيا لبورصة طهران وفرابورس إيران. لتقييم قدرة تعميم النموذج، تم استخدام طريقة الاختبار الخارجي. وبالتالي، تم تدريب النموذج باستخدام ٨٠٪ من البيانات، ثم اختبر باستخدام الـ ٢٠٪ المتبقية التي لم يتم مشاهدتها من قبل.

للإجابة على السؤال الأول من البحث، يتم إدخال ٥ مدخلات في النموذج تشمل: سعر الأداة الأساسية، سعر التنفيذ، المدة المتبقية حتى الاستحقاق، تقلبات سعر الأداة الأساسية، ومعدل الفائدة الخالي من المخاطر، ويطلب من النموذج التنبؤ بسعر أوراق الخيارات. وللإجابة على السؤال الثاني، فضلاً عن المدخلات الخمسة الأولى، يتم إضافة ٥ مدخلات أخرى تشمل معاملات الحساسية (دلتا، تيتا، غاما، فيغا، و رو)، ويقوم النموذج بتسعير أوراق الخيارات استناداً إلى هذه المدخلات العشرة.

1 - Gated Recurrent Unit

2 - Mean squared error

في هذا البحث، يتم استخدام نموذج بلاك شولز وأربعة نماذج تعلم آلي لتسعير أوراق الخيارات: تقوية التدرج السريع، تقوية التدرج الخفيف، الذاكرة طويلة الأجل قصيرة الأجل، ووحدة العودة ذات الاتجاه العالمي. وللمقارنة بين التنبؤات الناتجة عن هذه النماذج، يتم استخدام المعايير الإحصائية مثل المتوسط الحسابي للخطأ والجذر التربيعي للمتوسط الحسابي للأخطاء المربعة. بالاعتماد على برنامج Excel لتنظيم وتصنيف البيانات، وبرنامج Python لتحليل البيانات.

٦. متغيرات البحث

تنقسم متغيرات هذا البحث إلى قسمين:

١. مدخلات نموذج بلاك شولز وتشمل: سعر الأصل الأساسي، سعر التنفيذ، المدة المتبقية حتى تاريخ الاستحقاق، تقلبات سعر الأصل الأساسي، سعر الفائدة الخالي من المخاطر

٢. حساسيات الإغريقية وتشمل: دلتا وثيتا وغاما وفيغا ورو

١.٦ مدخلات نموذج بلاك-شولز

الأصل الأساسي: هو الأصل الذي يستند إليه أداة مشتقة، حيث يتم اشتقاق قيمة الأداة مباشرة من تقلبات سعر هذا الأصل. سعر السوق للأصل الأساسي هو السعر الذي يتم تحديده في السوق في أي لحظة معينة (Jun & Rakotondratsimba, 2023: p.2). يمكن الوصول إلى السعر الختامي للأصل الأساسي يوميًا عبر موقع شركة إدارة تقنية بورصة طهران.

سعر التنفيذ: هو السعر المحدد مسبقًا الذي يمكن من خلاله شراء أو بيع الأصل الأساسي عند ممارسة عقد الخيار (Kundu et al, 2016: p.3). سعر التنفيذ للأوراق المالية متاح يوميًا عبر موقع شركة إدارة تقنية بورصة طهران.

المدة المتبقية حتى الاستحقاق: تشير إلى العمر المتبقي لعقد الخيار، إذ يمكن لصاحب الخيار ممارسته حتى تصل هذه المدة إلى الصفر (Wang & Zhang, 2018: p.2). يتم حساب عدد الأيام المتبقية حتى نهاية صلاحية العقد عن طريق طرح تاريخ اليوم من تاريخ الاستحقاق.

تقلب سعر الأصل الأساسي: يشير إلى مدى تغير سعر الأصل بمرور الوقت (Shorokhov, 2020: p.2). لحساب التقلب، يتم أولاً جمع الأسعار اليومية للأصل الأساسي على مدى ٣٠ يومًا. ثم، إذ يتم حساب التغيرات النسبية في السعر، ومن ثم استخراج الانحراف المعياري لهذه التغيرات، والذي يمثل مستوى تقلب الأصل.

٢.٦ سعر الفائدة الخالي من المخاطر

سعر الفائدة الخالي من المخاطر هو العائد المتوقع من استثمار يكون محصنًا تمامًا من مخاطر الائتمان (Bianconi, 2015: p.5). نظرًا لظروف السوق الإيرانية وغياب سعر فائدة خالٍ من المخاطر بدقة، اعتمد سعر الفائدة على السندات الحكومية ذات الاستحقاقات المماثلة كبديل تقريبي لسعر الفائدة الخالي من المخاطر في هذه الدراسة. تم استخراج البيانات اللازمة من موقع فربورس.

٣.٦ حساسيات الإغريقية

تمثل دلتا حساسية سعر الخيار تجاه تغيرات سعر الأصل الأساسي (Sharma, 2020: p.2). يتم حساب دلتا باستخدام الصيغ التالية:

$$\text{دلتا خيار البيع} = e^{-qt} \times N(d_1)$$

$$\text{دلتا خيار الشراء} = e^{-qt} \times (N(d_1) - 1)$$

في الصيغ اعلاه:

q: معدل توزيع ارباح الأصل الاساسي.

t: الوقت حتى تاريخ استحقاق الخيار.

N(d1): دالة التوزيع الطبيعي التراكمي للقيمة d_1

ثيتا (Theta)

تمثل ثيتا حساسية سعر الخيار تجاه مرور الوقت (Sharma, 2020: p.2). يتم حساب ثيتا باستخدام الصيغ التالية:

$$\text{ثيتا خيار الشراء} = \frac{1}{T} \left(- \left(\frac{S_0 \sigma e^{-qt}}{2\sqrt{t}} * \frac{1}{\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{d_1^2}{2}} \right) - r X e^{-rt} N(d_2) + q S_0 e^{-qt} N(d_1) \right)$$

$$\text{ثيتا خيار البيع} = \frac{1}{T} \left(- \left(\frac{S_0 \sigma e^{-qt}}{2\sqrt{t}} * \frac{1}{\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{d_1^2}{2}} \right) + r X e^{-rt} N(-d_2) - q S_0 e^{-qt} N(-d_1) \right)$$

S: سعر الأصل الأساسي

r: معدل الفائدة

جاما (Gamma)

تشير جاما إلى معدل تغيير دلتا الخيار فيما يتعلق بتغيرات سعر الأصل الأساسي (Sharma, 2020: p.3). يتم حساب جاما باستخدام الصيغة التالية:

$$\text{جاما} = \frac{e^{-at}}{S_0 \sigma \sqrt{t}} * \frac{1}{\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{d_1^2}{2}}$$

فيغا (Vega)

تُظهر فيغا مدى حساسية سعر الخيار تجاه تغييرات تقلبات السوق (Paunovic, 2014: p.5). يتم حساب فيغا باستخدام الصيغة التالية:

$$\text{فيغا خيار الشراء} = \frac{\partial C}{\partial \sigma} = S \sqrt{T-t} N'(d_1) > 0,$$

$$\text{فيغا خيار البيع} = \frac{\partial p}{\partial \sigma} = v_c.$$

رو (Rho)

تقيس رو حساسية سعر الخيار تجاه تغييرات معدل الفائدة الحالي من المخاطر (Paunovic, 2014: p.5). يتم حساب رو باستخدام الصيغة التالية:

$$\text{رو خيار الشراء} = \frac{\partial}{\partial r} (S N(d_1) - K e^{-r(T-t)} N(d_2))$$

$$\text{رو خيار البيع} = \frac{\partial (C - S + K e^{-r(T-t)})}{\partial r}$$

K: سعر التنفيذ

C: سعر خيار الشراء

٧. النمذج

١.٧ نموذج بلاك-شولز

يُعد نموذج بلاك-شولز أداة تحليلية قوية لتسعير الأوراق المالية المشتقة. ومع ذلك، يعتمد هذا النموذج على مجموعة من الافتراضات المبسطة التي قد تكون بعيدة عن التعقيدات الفعلية لأسواق المال. من بين هذه الافتراضات، افتراض التوزيع الطبيعي للعوائد، والذي

يتعارض مع الأدلة التجريبية التي تشير إلى وجود تشوهات مثل الالتواء والتقرطح في توزيع العوائد. فضلا عن ذلك، فإن افتراض استقرار تقلبات أسعار الأسهم لا يتماشى مع ديناميكية الأسواق المالية. لذلك، يع نموذج بلاك-شولز نقطة انطلاق جيدة، ولكنه يتطلب تعديلات وتطويرات لتحقيق تنبؤات دقيقة في ظل ظروف السوق غير المستقرة (Flint & Mare, 2017: p.1).

٢.٧ تعزيز التدرج السريع (Extreme Gradient Boosting, XGB)

تعزيز التدرج السريع هو تحسين مهم في خوارزمية تعزيز التدرج التقليدية، ويستخدم على نطاق واسع بسبب كفاءته وبساطته. بينما تضيف خوارزمية تعزيز التدرج شجرة قرار واحدة في كل خطوة، فإن تعزيز التدرج السريع يضيف عدة أشجار بشكل متزامن، مما يمكن النموذج من تمثيل تعقيدات البيانات غير الخطية بشكل أفضل. هذه الميزة، إلى جانب الحاجة الأقل لضبط المعلمات، جعلت تعزيز التدرج السريع أداة قوية في مسائل الانحدار والتصنيف (Sood et al, 2023: p.5).

٣.٧ تعزيز التدرج الخفيف (Light Gradient Boosting Machine, LGBM)

يُعد تعزيز التدرج الخفيف من أقوى وأكثر خوارزميات التعلم الآلي، ويستخدم على نطاق واسع في مسائل الانحدار والتصنيف بفضل سرعته العالية ودقته الملحوظة. يستفيد هذا الخوارزم من تقنيات مبتكرة مثل نمو أشجار القرار بشكل متوازي وتحسين استخدام الذاكرة، مما يمكنه من معالجة كميات ضخمة من البيانات بسرعة وإنتاج نماذج أكثر دقة. كما أن سهولة تنفيذه وضبط معلماته جعلت منه اختيارًا شائعًا بين الباحثين ومهندسي البيانات (Andreevna, 2022: p.50).

٤.٧ الذاكرة طويلة وقصيرة المدى (Long Short-Term Memory, LSTM)

تُعد الذاكرة طويلة وقصيرة المدى نوعًا من الشبكات العصبية التكرارية التي تم تحسينها بإضافة خلايا ذاكرة إلى بنيتها الأساسية. تتيح هذه الخلايا للشبكة تعلم التبعية طويلة المدى في البيانات التسلسلية بفضل استخدام بوابات تخزين أو حذف المعلومات بشكل انتقائي. يساعد هذا النهج على الاحتفاظ بالمعلومات المهمة لفترة أطول، مما يجعل LSTM فعالاً في تطبيقات مثل الترجمة الآلية، التعرف على الكلام، وتحليل المشاعر (Djagba & Ndizihwe, 2024: p.8).

٥.٧ الوحدة التكرارية ذات البوابات (Gated Recurrent Unit, GRU)

الوحدة التكرارية ذات البوابات هي نوع من الشبكات العصبية التكرارية المصممة لمعالجة البيانات التسلسلية مثل النصوص، الصوت، والبيانات الزمنية. استُلهمت GRU من بنية LSTM، ولكنها تتميز ببنية أبسط حيث تتطلب بوابات أقل، مما يؤدي إلى تدريب أسرع وأداء أفضل في بعض المهام. بفضل آليات البوابات، تتجنب GRU مشكلة تلاشي التدرج وتحافظ على المعلومات المهمة لفترات أطول، مما يجعلها أداة قوية لتطبيقات مثل الترجمة الآلية، التعرف على الكلام، والتنبؤ بالسلاسل الزمنية (Djagba & Ndizihwe, 2024: p.9).

٨. تحليل البيانات واختبار الفرضيات:

١.٨ الإحصاء الوصفي

في هذه الدراسة، تم جمع وتحليل مجموعة واسعة من المعلمات المرتبطة بعقود الخيارات، بما في ذلك سعر الأصل الأساسي، الوقت المتبقي حتى تاريخ الاستحقاق، سعر الفائدة الخالي من المخاطر، سعر التنفيذ، السعر السوقي، ومعاملات الحساسية اليونانية (دلتا، ثيتا، غاما، فيغا، ورو).

تم حساب الإحصاءات الوصفية لكل من هذه المعلمات، والتي تشمل:

المتوسط الحسابي: يمثل القيمة المتوسطة للبيانات.

الانحراف المعياري: يعكس مدى تباعد البيانات عن المتوسط.

الحد الأدنى والحد الأقصى: يمثلان أدنى وأعلى قيمة مسجلة.
الرباعيات (الربع الأول، الوسيط، الربع الثالث): تعكس توزيع البيانات على ثلاثة أقسام متساوية.

جدول (١) التحليل الوصفي لمتغيرات البحث

المعاملات	المتوسط	الانحراف المعياري	الحد الأدنى	الربع الأول	الوسيط	الربع الثالث	الحد الأقصى
سعر الأصل الأساسي	3497.90	3378.23	398.00	1313.00	2272.00	3234.00	15610.00
الوقت المتبقي حتى الاستحقاق	0.45	0.27	0.04	0.22	0.44	0.68	0.78
معدل الفائدة الخالي من المخاطر	0.27	0.03	0.19	0.24	0.27	0.30	0.33
سعر التنفيذ	2824.32	2865.17	400.00	1200.00	1900.00	2800.00	13720.00
سعر السوق لعقود الخيارات	972.27	1269.96	11.00	244.25	517.00	1000.00	8977.00
دلتا	0.82	0.261992878	0.00	0.743419921	0.962617416	0.999216697	1
فيجا	-1.63	1.691314978	-24.1327937	-6.60358428	-1.10888213	-0.63720243	-9.1E-100
جاما	0.00049	0.000920757	0.00	0.000003949	0.00013268	0.000677223	0.022256712
فيغا	2.80	5.234160932	0.00	0.030487469	0.955734057	3.388291024	42.07350399
رو	8.69	11.88562906	0.00	2.116413558	4.653107551	9.623031644	73.94516626

وفقاً للجدول أعلاه، فإن عقود الخيارات المستخدمة في هذه الدراسة كان سعر التنفيذ لها يتراوح بين ٤٠٠ و ١٣,٧٢٠ ريالاً. كما أن أسعار الأسهم التي تم تداول هذه العقود عليها تراوحت بين ٣٩٨ و ١٥,٦١٠ ريالاً. أما السعر السوقي لهذه العقود فقد كان يتراوح بين ١١ و ٨,٩٧٧ ريالاً.

٢.٨ تقدير نماذج البحث

السؤال الأول: ما مدى فاعلية أداء خوارزميات التعلم الآلي في تسعير عقود الخيارات مقارنة بنموذج بلاك-شولز؟ للإجابة على السؤال الأول والثاني، تم استخراج بيانات الإدخال لنموذج بلاك-شولز وحسب النتائج الواردة في الجدول ٢ والرسم البياني ١.

الجدول (٢) تقييم قدرة خوارزميات التعلم الآلي ونموذج بلاك-شولز على التنبؤ الدقيق بأسعار عقود الخيارات

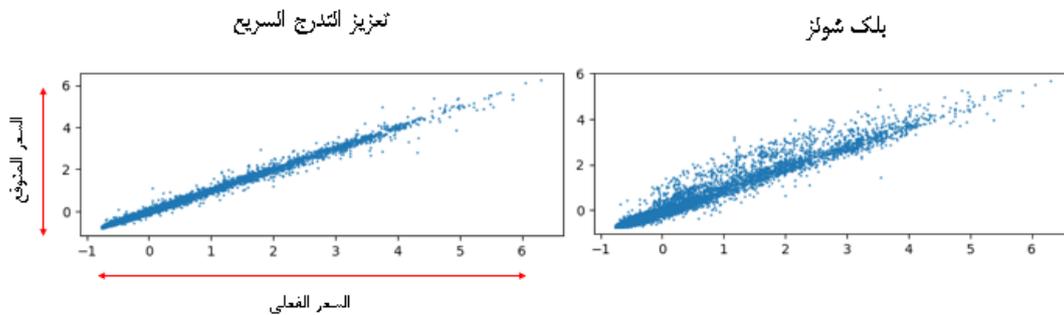
نموذج	MAE	RMSE
تعزيز التدرج السريع	0.0382	0.0730
تعزيز التدرج الخفيف	0.0481	0.0932
الذاكرة القصيرة طويلة المدى	0.0472	0.1010
الوحدة التكرارية المزودة بوابات	0.0473	0.1086
بلاك-شولز	0.1054	0.2020

الرسم البياني ١ يبين مقارنة بين دقة خوارزميات التعلم الآلي ونموذج بلاك-شولز في التنبؤ بأسعار عقود الخيارات.



اظهر تحليل الجدول ٢ و الرسم البياني ١ أن جميع خوارزميات التعلم الآلي المستخدمة في هذه الدراسة قد أظهرت أخطاء أقل مقارنةً بنموذج بلاك-شولز في التنبؤ بأسعار عقود الخيارات. وهذا يدل على أن نماذج التعلم الآلي تقدم أداءً أفضل من نموذج بلاك-شولز في هذا المجال. من بين جميع خوارزميات التعلم الآلي، أظهر خوارزم "تعزيز التدرج السريع" أفضل أداء، وبالتالي، سيتم في ما يلي رسم الرسم البياني ٢ كتمثيل لخوارزم "تعزيز التدرج السريع" كنموذج من نماذج التعلم الآلي مقارنةً بنموذج بلاك-شولز.

الرسم البياني ٢ يعرض التوافق بين التنبؤات التي قدمها نموذج بلاك-شولز وخوارزم "تعزيز التدرج السريع" مع القيم الفعلية.



الرسم البياني ٢. القيم المتوقعة مقابل القيم الفعلية لنموذج بلاك-شولز وخوارزم "تعزيز التدرج السريع"

يوضح الرسم بوضوح أن خوارزم "تعزيز التدرج السريع" يعمل بخطية أكبر بكثير مقارنةً بنموذج بلاك-شولز، مما يدل على توافق أفضل مع البيانات الفعلية.

السؤال الثاني: ما تأثير إضافة معاملات الحساسية اليونانية إلى مدخلات نماذج التعلم الآلي على أداء هذه النماذج في تسعير عقود الخيارات؟

للإجابة على السؤال الثاني في البحث، اعتمدت عشرة مجموعات بيانات مختلفة كمدخلات إلى نماذج التعلم الآلي. وتم التوصل إلى النتائج التالية :-

الجدول (٣) تقييم أداء خوارزميات التعلم الآلي في التنبؤ بأسعار عقود الخيارات قبل وبعد إضافة مدخلات الحساسية اليونانية، بناءً على معيار الخطأ المطلق المتوسط.

MAE (With Greek)	MAE	نموذج
0.0359	0.0382	تعزير التدرج السريع
0.0459	0.0481	تعزير التدرج الخفيف
0.0489	0.0472	الذاكرة القصيرة طويلة المدى
0.0485	0.0473	الوحدة التكرارية المزودة بوابات

الرسم البياني ٣ يبين مقارنة أداء نماذج التعلم الآلي قبل وبعد إضافة مدخلات الحاسوبية اليونانية بناءً على المعيار الإحصائي للخطأ المطلق المتوسط.



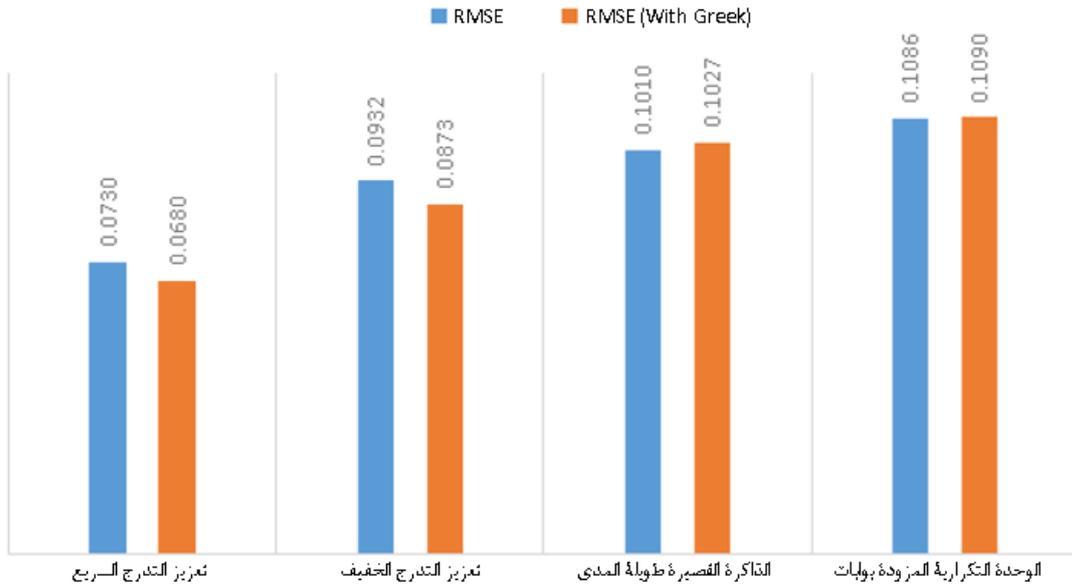
الرسم البياني ٣: مقارنة أداء نماذج التعلم الآلي قبل وبعد إضافة مدخلات الحاسوبية اليونانية بناءً على المعيار الإحصائي للخطأ المطلق المتوسط

في سبيل زيادة مصداقية النتائج، في الخطوة التالية سيتم مقارنة أداء نماذج التعلم الآلي قبل وبعد إضافة معايير الحاسوبية اليونانية هذه المرة بناءً على المعيار الإحصائي للجذر التربيعي للمتوسط المربعات للخطأ.

الجدول (٤) تقييم أداء خوارزميات التعلم الآلي في التنبؤ بأسعار خيارات التداول قبل وبعد إضافة مدخلات الحاسوبية اليونانية بناءً على المعيار الإحصائي للجذر التربيعي للمتوسط المربعات للخطأ

RMSE (With Greek)	RMSE	نموذج
0.0680	0.0730	تعزير التدرج السريع
0.0873	0.0932	تعزير التدرج الخفيف
0.1027	0.1010	الذاكرة القصيرة طويلة المدى
0.1090	0.1086	الوحدة التكرارية المزودة بوابات

في الرسم البياني ٤، يتم مقارنة أداء نماذج التعلم الآلي قبل وبعد إضافة مدخلات الحاسوبية اليونانية بناءً على المعيار الإحصائي للجذر التربيعي للمتوسط المربعات للخطأ.



الرسم البياني ٤: مقارنة أداء نماذج التعلم الآلي قبل وبعد إضافة مدخلات الحساسية اليونانية بناءً على المعيار الإحصائي للجذر التربيعي للمتوسط المربعات للخطأ

مراجعة النتائج المستخلصة من الجداول ٣ و ٤، وكذلك مقارنتها من خلال الرسوم البيانية ٣ و ٤، تظهر أن إضافة معايير الحساسية اليونانية إلى مدخلات نماذج التعلم الآلي في سياق التنبؤ بأسعار خيارات التداول لا يمكن أن يؤدي بالضرورة إلى تحسين أداء جميع هذه النماذج. كما هو ملاحظ، تحسنت أداء خوارزميات التعلم مثل تعزيز التدرج السريع وتعزيز التدرج الخفيف بعد إضافة هذه المدخلات، ولكن في المقابل انخفضت دقة خوارزميات الشبكة العصبية المتكررة ووحدة الذاكرة طويلة المدى. في الواقع، تمكنت بعض الخوارزميات من الاستفادة من هذه البيانات لتحسين أدائها، بينما لم تتمكن بعض الخوارزميات الأخرى من استخدامها بشكل صحيح مما أدى إلى زيادة الارتباك في أدائها.

٩. الاستنتاج والمناقشة

في هذه الدراسة، تم مقارنة أداء نماذج التعلم الآلي ونموذج بلاك-شولز في تسعير الأوراق المالية للخيارات باستخدام بيانات ١٥٣ عقدًا من عقود الخيارات التي تم تداولها في سوق الأوراق المالية الإيرانية بين فترة من شهر من أبريل ٢٠١٨م إلى شهر يوليو ٢٠٢٤م. أظهرت نتائج الدراسة تفوق نماذج التعلم الآلي على نموذج بلاك-شولز في التنبؤ بأسعار هذه الأوراق. وهذا يدل على أن نماذج التعلم الآلي تقدم أداءً أفضل من نموذج بلاك-شولز في هذا المجال. من بين جميع خوارزميات التعلم الآلي، أظهر خوارزم "تعزيز التدرج السريع" أفضل أداء، كما أظهرت نتائج السؤال الثاني للدراسة أن تأثير إضافة معايير الحساسية اليونانية على أداء نماذج التعلم الآلي ليس موحدًا ويعتمد على نوع النموذج. ففي بعض الحالات، أدت إضافة هذه المعايير إلى تحسين دقة التنبؤ، بينما في حالات أخرى قد تؤدي إلى تعقيد النموذج بشكل زائد وتقليل دقته.

كم أن إضافة معايير الحساسية اليونانية إلى مدخلات نماذج التعلم الآلي في سياق التنبؤ بأسعار خيارات التداول لا يمكن أن يؤدي بالضرورة إلى تحسين أداء جميع هذه النماذج. كما هو ملاحظ، تحسنت أداء خوارزميات التعلم مثل تعزيز التدرج السريع وتعزيز التدرج الخفيف بعد إضافة هذه المدخلات، ولكن في المقابل انخفضت دقة خوارزميات الشبكة العصبية المتكررة ووحدة الذاكرة طويلة المدى. في الواقع، تمكنت بعض الخوارزميات من الاستفادة من هذه البيانات لتحسين أدائها، بينما لم تتمكن بعض الخوارزميات الأخرى من استخدامها بشكل صحيح مما أدى إلى زيادة الارتباك في أدائها

نظرًا لأن سوق الخيارات في إيران لا يزال في مرحلة مبكرة، فإن الدراسات العلمية والبحثية في هذا المجال لم تكن كافية بعد، مما يستدعي المزيد من الأبحاث في هذا المجال.

للبحوث المستقبلية، يُوصى بإجراء مقارنة أعمق بين خوارزميات التعلم الآلي ونماذج انتشار القفزات للحصول على فهم شامل لإمكانات كل منها في التنبؤ بأسعار الأوراق المالية للخيارات في سوق الأسهم الإيرانية. كما يمكن الاستفادة من خوارزميات تعلم آلي أخرى مثل الغابة العشوائية والخوارزميات المدمجة مثل (LSTM-MLP) لتسعير الأوراق المالية للخيارات، ومقارنة دقتها مع دقة خوارزمية تعزيز التدرج السريع بهدف تحديد خوارزميات أكثر كفاءة لتنبؤ أسعار الأوراق المالية للخيارات في سوق الأسهم الإيرانية.

References

1. Almeida, C., Fan, J., Freire, G., & Tang, F. (2023). Can a machine correct option pricing models?. *Journal of Business & Economic Statistics*, 41(3), 995-1009.
2. Andreevna, L. M. (2022). Increasing the Accuracy of Financial Accounting by Applying Machine-Learning for Options Pricing. Master's thesis, Saint Petersburg State University, Saint Petersburg, Russia.
3. Aziz, S., & Dowling, M. (2019). Machine learning and AI for risk management. *Disrupting Finance: FinTech and Strategy in the 21st Century*, 33-50.
4. (4)Ban, G. Y., El Karoui, N., & Lim, A. E. (2018). Machine learning and portfolio optimization. *Management Science*, 64(3), 1136-1154.
5. Bianconi, M., MacLachlan, S., & Sammon, M. (2015). Implied volatility and the risk-free rate of return in options markets. *The North American Journal of Economics and Finance*, 31, 1-26.
6. Bramante, R., Dallago, G., & Facchinetti, S. (2022). Black's model in a negative interest rate environment, with application to OTC derivatives. *Computational Management Science*, 19(1), 25-39.
7. Chen, J., Luo, C., Pan, L., & Jia, Y. (2021). Trading strategy of structured mutual fund based on deep learning network. *Expert Systems with Applications*, 183, 115390.
8. Culkin, R., & Das, S. R. (2017). Machine learning in finance: the case of deep learning for option pricing. *Journal of Investment Management*, 15(4), 92-100.
9. Djagba, P., & Ndizihiwe, C. (2024). Pricing American Options using Machine Learning Algorithms. arXiv preprint arXiv:2409.03204.
10. Fan, L., & Sirignano, J. (2024). Machine Learning Methods for Pricing Financial Derivatives. arXiv preprint arXiv:2406.00459.
11. Feng, C., Tan, J., Jiang, Z., & Chen, S. (2020). A generalized European option pricing model with risk management. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 545, 123797.
12. Flint, E., & Maré, E. (2017). Fractional Black-Scholes option pricing, volatility calibration and implied Hurst exponents in South African context. *South African journal of economic and management sciences*, 20(1), 1-11.
13. Goard, J., & AbaOud, M. (2022). Pricing European and American installment options. *Mathematics*, 10(19), 3494.
14. Heston, S. L. & Nandi, S. (2000). A closed-form GARCH option valuation model. *The review of financial studies*, 13(3): 585-625.
15. Hull, J. & White, A. (1987). The pricing of options on assets with stochastic volatilities. *The journal of finance*, 42(2): 281-300.
16. Jun, J. Y., & Rakotondratsimba, Y. (2023). Approximating Option Prices under Large Changes of Underlying Asset Prices. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 26(01), 2350004.
17. Kundu, A., Kumar, S., Kumar Tomar, N., & Kumar Gupta, S. (2016). Call option price function in Bernstein polynomial basis with no-arbitrage inequality constraints. *Journal of Inequalities and Applications*, 2016, 1-16.
18. Leung, C. K. S., MacKinnon, R. K., & Wang, Y. (2014, July). A machine learning approach for stock price prediction. In *Proceedings of the 18th international database engineering & applications symposium* (pp. 274-277).
19. Li, W. (2022, April). Application of Machine Learning in Option Pricing: A Review. In *2022 7th International Conference on Social Sciences and Economic Development (ICSSSED 2022)* (pp. 209-214). Atlantis Press.
20. Li, J. (2024, May). Comparison of Option Pricing Based on Black-Scholes and Binomial Tree: Evidence from Moutai's Share Price. In *9th International Conference on Financial Innovation and Economic Development (ICFIED 2024)* (pp. 342-351). Atlantis Press.
21. Lim, T. (2023). Replication of financial derivatives under extreme market models given marginals. arXiv preprint arXiv:2307.00807.
22. Lindgren, J. (2023). A Generalized Model for Pricing Financial Derivatives Consistent with Efficient Markets Hypothesis—A Refinement of the Black-Scholes Model. *Risks*, 11(2), 24.
23. Maciel, L. D. S., Angelov, P., & Gomide, F. (2024). Guest editorial: Special issue: Applications of artificial intelligence and machine learning in business, finance and economics. *Revista de Gestão*, 31(2), 134-136.
24. Melino, A. & Turnbull, S. M. (1990). Pricing foreign currency options with stochastic volatility. *Journal of econometrics*, 45(1-2): 239-265.



25. Moradi Nik, H. (2023). A study of option pricing models: A case study of option trading on the Tehran Stock Exchange. Master's thesis, University of Tehran, Tehran, Iran.
26. Njomen, D. A. N., & Djeutcha, E. (2019). Solving black-schole equation using standard fractional brownian motion. *J. Math. Res*, 11(11), 142-157.
27. Parameswaran, S. K., & Basu, S. (2020). The black-scholes merton model—implications for the option delta and the probability of exercise. *Theoretical Economics Letters*, 10(6), 1307-1313.
28. Parsemanesh, F., Masoudi, N., Vakilzadeh Dizaji, R., & Gharibeh, A. (2022). Effects of option contracts in Iranian and French law. *Iranian Journal of Political Sociology*, 5(2), 871-897. (In Persian)
29. Paunović, J. (2014). Options, Greeks, and risk management. *The European Journal of Applied Economics*, 11(1).
30. Peymani, M., Sargolzaei, M., & Mosafa, A. (2024). Option Pricing by Binomial Model under Knightian Uncertainty and Transaction Cost in Tehran Stock Exchange. *Financial Engineering and Portfolio Management*, 15(59): 168-188. (In Persian).
31. Rygg, E. S., Vinje, H. J., & Wu, C. (2023). Enhanced Option Pricing Using Deep Learning: A Time-Series Approach with a Combined LSTM-MLP Model (Master's thesis, NTNU).
32. Saadai Jahromi, S. (2023). Option pricing using machine learning. Master's thesis, Allameh Tabataba'i University, Tehran, Iran. (In Persian)
33. Sharma, N. (2020). Index Option Greek Analysis with Heikin-Ashi Transformed Data and Its prediction with Artificial Neural Network. *International Journal of Scientific Research in Computer Science, Engineering and Information Technology*, 166-169.
34. Shorokhov, S. G. (2020). On option pricing in local volatility models using parallel computing. In *ITTMM* (pp. 108-116).
35. Sood, S. Jain, T. Batra, N. & Taneja, H. C. (2023, February). Black-Scholes option pricing using machine learning. In *Proceedings of International Conference on Data Science and Applications: ICDSA 2022, Volume 1* (pp. 481-493). Singapore: Springer Nature Singapore.
36. Stein, E. M. & Stein, J. C. (1991). Stock price distributions with stochastic volatility: an analytic approach. *The review of financial studies*, 4(4): 727-752.
37. Wang, J., & Zhang, D. (2018). Timer option pricing of stochastic volatility model with changing coefficients under time-varying interest rate. *Journal of Nonlinear Sciences & Applications (JNSA)*, 11(12).
38. Wu, H. F. (2019). From constant to stochastic volatility: Black-Scholes versus Heston option pricing models. *Senior Projects Spring 2019*, 163.
39. Yosefzadeh Gandvani, M., Niknehad, J. & Ghanbarpor, B. (2020). Deal agreement on Iranian law and Imami jurisprudence. *International Legal Research Scientific Quarterly*, 13(49), 349-368. (In Persian).
40. Zouaoui, H. & Naas, M. N. (2023). Option pricing using deep learning approach based on LSTM-GRU neural networks: Case of London stock exchange. *Data Science in Finance and Economics*, 3(3): 267-284.